

Задача В8

Геометрический смысл производной

В задаче В8 дается график функции или производной, по которому требуется определить одну из следующих величин:

Значение производной в некоторой точке x_0 ,
Точки максимума или минимума (точки экстремума),
Интервалы возрастания и убывания функции (интервалы монотонности).
Функции и производные, представленные в этой задаче, всегда непрерывны, что значительно упрощает решение. Не смотря на то, что задача относится к разделу математического анализа, она вполне по силам даже самым слабым ученикам, поскольку никаких глубоких теоретических познаний здесь не требуется.

Для нахождения значения производной, точек экстремума и интервалов монотонности существуют простые и универсальные алгоритмы — все они будут рассмотрены ниже.

Информация к размышлению

Внимательно читайте условие задачи В8, чтобы не допускать глупых ошибок: иногда попадаются довольно объемные тексты, но важных условий, которые влияют на ход решения, там немного.

Вычисление значения производной. Метод двух точек

Если в задаче дан график функции $f(x)$, касательная к этому графику в некоторой точке x_0 , и требуется найти значение производной в этой точке, применяется следующий алгоритм:

Найти на графике касательной две «адекватные» точки: их координаты должны быть целочисленными. Обозначим эти точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Правильно выписывайте координаты — это ключевой момент решения, и любая ошибка здесь приводит к неправильному ответу.

Зная координаты, легко вычислить приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1$ и приращение функции $\Delta y = y_2 - y_1$.

Наконец, находим значение производной $D = \Delta y / \Delta x$. Иными словами, надо разделить приращение функции на приращение аргумента — и это будет ответ.

Еще раз отметим: точки A и B надо искать именно на касательной, а не на графике функции $f(x)$, как это часто случается. Касательная обязательно будет содержать хотя бы две таких точки — иначе задача составлена некорректно.

Задача. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение. Рассмотрим точки $A(-3; 2)$ и $B(-1; 6)$ и найдем приращения:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1 - (-3) = 2; \Delta y = y_2 - y_1 = 6 - 2 = 4.$$

Найдем значение производной: $D = \Delta y / \Delta x = 4/2 = 2$.

Ответ: 2

Задача. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение. Рассмотрим точки $A(0; 3)$ и $B(3; 0)$, найдем приращения:
 $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 0 = 3$; $\Delta y = y_2 - y_1 = 0 - 3 = -3$.

Теперь находим значение производной: $D = \Delta y / \Delta x = -3/3 = -1$.

Ответ: -1

Задача. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Решение. Рассмотрим точки $A(0; 2)$ и $B(5; 2)$ и найдем приращения:
 $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 0 = 5$; $\Delta y = y_2 - y_1 = 2 - 2 = 0$.

Осталось найти значение производной: $D = \Delta y / \Delta x = 0/5 = 0$.

Ответ: 0

Из последнего примера можно сформулировать правило: если касательная параллельна оси OX , производная функции в точке касания равна нулю. В этом случае даже не надо ничего считать — достаточно взглянуть на график.

Вычисление точек максимума и минимума

Иногда вместо графика функции в задаче В8 дается график производной и требуется найти точку максимума или минимума функции. При таком раскладе метод двух точек бесполезен, но существует другой, еще более простой алгоритм. Для начала определимся с терминологией:

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x)$.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: $f(x_0) \leq f(x)$.

Для того чтобы найти точки максимума и минимума по графику производной, достаточно выполнить следующие шаги:

Перечертить график производной, убрав всю лишнюю информацию. Как показывает практика, лишние данные только мешают решению. Поэтому отмечаем на координатной оси нули производной — и все.

Выяснить знаки производной на промежутках между нулями. Если для некоторой точки x_0 известно, что $f'(x_0) \neq 0$, то возможны лишь два варианта: $f'(x_0) \geq 0$ или $f'(x_0) \leq 0$. Знак производной легко определить по исходному чертежу: если график производной лежит выше оси OX , значит $f'(x) \geq 0$. И наоборот, если график производной проходит под осью OX , то $f'(x) \leq 0$.

Снова проверяем нули и знаки производной. Там, где знак меняется с минуса на плюс, находится точка минимума. И наоборот, если знак производной меняется с плюса на минус, это точка максимума. Отсчет всегда ведется слева направо.

Эта схема работает только для непрерывных функций — других в задаче В8 не встречается.

Задача. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-5; 5]$. Найдите точку минимума функции $f(x)$ на этом отрезке.

Решение. Избавимся от лишней информации — оставим только границы $[-5; 5]$ и нули производной $x = -3$ и $x = 2,5$. Также отметим знаки:

Очевидно, в точке $x = -3$ знак производной меняется с минуса на плюс. Это и есть точка минимума.

Ответ: -3

Задача. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-3; 7]$. Найдите точку максимума функции $f(x)$ на этом отрезке.

Решение. Перечертим график, оставив на координатной оси только границы $[-3; 7]$ и нули производной $x = -1,7$ и $x = 5$. Отметим на полученном графике знаки производной.

Имеем:

Очевидно, в точке $x = 5$ знак производной меняется с плюса на минус — это точка максимума.

Ответ: 5

Задача. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-6; 4]$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 3]$.

Решение. Из условия задачи следует, что достаточно рассмотреть только часть графика, ограниченную отрезком $[-4; 3]$. Поэтому строим новый график, на котором отмечаем только границы $[-4; 3]$ и нули производной внутри него. А именно, точки $x = -3,5$ и $x = 2$. Получаем:

На этом графике есть лишь одна точка максимума $x = 2$. Именно в ней знак производной меняется с плюса на минус.

Ответ: 1

Небольшое замечание по поводу точек с нецелочисленными координатами. Например, в последней задаче была рассмотрена точка $x = -3,5$, но с тем же успехом можно взять $x = -3,4$. Если задача составлена корректно, такие изменения не должны влиять на ответ, поскольку точки «без определенного места жительства» не принимают непосредственного участия в решении задачи. Разумеется, с целочисленными точками такой фокус не пройдет.

Нахождение интервалов возрастания и убывания функции

В такой задаче, подобно точкам максимума и минимума, предлагается по графику производной отыскать области, в которых сама функция возрастает или убывает. Для начала определим, что такое возрастание и убывание:

Функция $f(x)$ называется возрастающей на отрезке $[a; b]$ если для любых двух точек x_1 и x_2 из этого отрезка верно утверждение: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Другими словами, чем больше значение аргумента, тем больше значение функции.

Функция $f(x)$ называется убывающей на отрезке $[a; b]$ если для любых двух точек x_1 и x_2 из этого отрезка верно утверждение: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания:

Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ возрастала на отрезке $[a; b]$, достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была положительна, т.е. $f'(x) \geq 0$.

Для того чтобы непрерывная функция $f(x)$ убывала на отрезке $[a; b]$, достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была отрицательна, т.е. $f'(x) \leq 0$.

Примем эти утверждения без доказательств. Таким образом, получаем схему для нахождения интервалов возрастания и убывания, которая во многом похожа на алгоритм вычисления точек экстремума:

Убрать всю лишнюю информацию. На исходном графике производной нас интересуют в первую очередь нули функции, поэтому оставим только их.

Отметить знаки производной на интервалах между нулями. Там, где $f'(x) \geq 0$, функция возрастает, а где $f'(x) \leq 0$ — убывает. Если в задаче установлены ограничения на переменную x , дополнительно отмечаем их на новом графике.

Теперь, когда нам известно поведение функции и ограничения, остается вычислить требуемую в задаче величину.

Задача. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-3; 7,5]$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.

Решение. Как обычно, перечертим график и отметим границы $[-3; 7,5]$, а также нули производной $x = -1,5$ и $x = 5,3$. Затем отметим знаки производной. Имеем:

Поскольку на интервале $(-1,5)$ производная отрицательна, это и есть интервал убывания функции. Осталось просуммировать все целые числа, которые находятся внутри этого интервала:

$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14.$$

Ответ: 14

Задача. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-10; 4]$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение. Избавимся от лишней информации. Оставим только границы $[-10; 4]$ и нули производной, которых в этот раз оказалось четыре: $x = -8$, $x = -6$, $x = -3$ и $x = 2$. Отметим знаки производной и получим следующую картинку:

Нас интересуют промежутки возрастания функции, т.е. такие, где $f'(x) \geq 0$. На графике таких промежутков два: $(-8; -6)$ и $(-3; 2)$. Вычислим их длины:

$$l_1 = -6 - (-8) = 2;$$

$$l_2 = 2 - (-3) = 5.$$

Поскольку требуется найти длину наибольшего из интервалов, в ответ записываем значение $l_2 = 5$.

Ответ: 5